Lösung zu den Wettbewerbsaufgaben aus Heft 2

(a) Die Aufgabe für die Unterstufe lautete:

Ein Tennisclub hat 189 Mitglieder. Acht sind seit weniger als drei Jahren Mitglied, elf sind unter 20 Jahre,70 tragen eine Brille und 140 sind Männer.
Wie lautet die niedrigste Anzahl von Personen, die seit mindestens drei Jahren Mitglied sind, wenigstens 20 Jahre alt, Brillenträger und Männer sind? Die Antwort ist hinreichend zu begründen.

Lösung: Es sind 2 Personen. Hier die (von mir etwas einfacher geschriebene) Begründung von Ingo Krämer (Klasse 7f): man muss von der Gesamtanzahl jeweils die Personenanzahl abziehen, deren Eigenschaft unerwünscht ist, also:
189 – 8 (weil weniger als 3 Jahre Mitglied) – 11 (weil unter 20 Jahre) – 119 (weil keine Brillenträger) - 49 (weil Frauen) = 2. Und somit bleiben nur 2 Personen mit den gewünschten Eigenschaften übrig.

(b) Die Aufgabe für die Mittelstufe lautete:

Es war einmal eine große Bauernfamilie, in der n Brüder je n Kühe hatten.
Eines Tages kamen drei Händler zu der Familie, die alle Kühe aufkaufen wollten, und zwar so, dass jeder Händler die gleich Anzahl von Kühen bekommen sollte.
„Ok“, sagten die Brüder, „bis auf zwei Kühe, die für unsere Eltern bestimmt sind, könnt ihr uns die restlichen Kühe abkaufen!“
Kam der Handel zustande? Begründe deine Antwort!

Lösung: Nein, der Handel kam nicht zustande; denn n^2 ist nie teilbar durch 3 mit Rest 2.
Beweis: n geteilt durch 3 ergibt *nur* Rest 0, 1 oder 2; demnach gibt es drei Fälle:

1.Fall: $n = 3k$ (Rest 0)
2.Fall: $n = 3k+1$ (Rest 1)
3.Fall: $n = 3k+2$ (Rest 2)

Wir untersuchen alle 3 Fälle:

1.Fall: $n = 3\,k \rightarrow n^2 = 9k^2 = 3*(3k^2) \rightarrow$ Rest 0

2.Fall: $n = 3\,k \rightarrow n^2 = (3k+1)^2$
$= 9k^2+6k+1$
$= 3(3k^2 +2k)+1 \rightarrow$ Rest 1

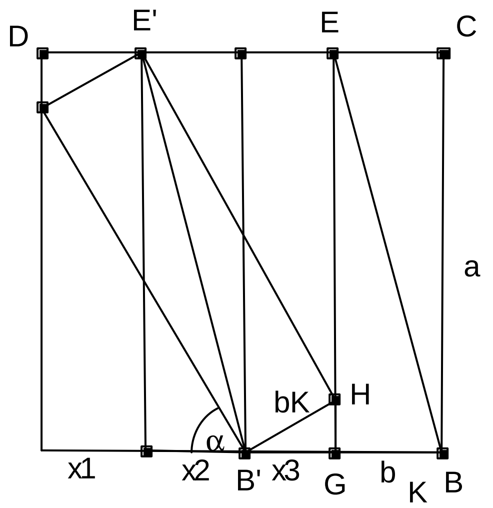
3.Fall: $n = 3\,k \rightarrow n^2 = (3k+2)^2$
$= 9k^2 +12k+4$
$= 3(3k^2 +4k+1)+1 \rightarrow$ Rest 1

also nie Rest 2
damit bleiben nie 2 Kühe übrig, egal was n ist.

(c) Die Aufgabe für die Oberstufe lautete:

Durch eine seitenparallele Gerade wird ein Quadrat in zwei ungleiche Rechtecke zerlegt; das größere sei G, das kleinere sei K.
Bei welcher Zerlegung kann man K auf G derart legen, dass jeder Eckpunkt von K auf genau einer Seite von G zu liegen kommt?

Lösung: Wenn die Seitenlänge des Quadrates a ist, ist die Breite b_K des kleineren Rechtecks $(2 - \sqrt{3})\,a$ und die Breite des größeren Rechtecks b_G natürlich $a - b_K = \sqrt{3} - a$.
Hier ein recht intelligenter und kurzer Beweis *(meines Bruders Werner Haungs):*



B’ sei die Mitte von AB; x_2 sei gleich b_K, also

1. $x_2 = b_K$; wegen BE = B’E’ und BE parallel B’E’, gilt dann wegen der symmetrischen Lage
2. $x_1 = x_3$;
3. daraus folgt $x_1 + x_2 + x_3 + b_K = x_1 + x_2 + x_1 + x_2 = 2x_1 + 2x_2 = a$
4. daraus folgt $x_1 + x_2 = \frac{a}{2}$
5. daraus folgt a = 60° (AB’F ist ein halbes gleichseitiges Dreieck)
6. daraus folgt für das Dreieck B’GH cos 30° = $\frac{x_3}{b_K} = \frac{x_1}{b_K} = \frac{\frac{a}{2} - x_2}{b_K} = \frac{\frac{a}{2} - b_K}{b_K}$ die

Umformungen ergeben sich mit Hilfe der Beziehungen 1. bis 4. Löst man die Gleichung nach b_K auf und macht den Nenner rational, erhält man obige Behauptung, dass $b_K = (2 - \sqrt{3})\, a$

Paul Weisenhorn (ehemaliger Lehrer und Stundenplaner unserer Schule) hat dazu eine verblüffend einfache Konstruktion gefunden. Für interessierte Leser besteht die Möglichkeit, bei Herrn Haungs nachzufragen.