Lösung der Wettbewerbsaufgaben von Heft 3

(a) für die Unterstufe

Ein Mann geht Äpfel pflücken. Um in die Stadt zu kommen, muss er 7 Tore passieren. An jedem Tor steht eine Wächterin und verlangt von ihm die Hälfte seiner Äpfel und einen Apfel mehr. Am Schluss bleibt dem Mann nur ein Apfel übrig. Wie viele Äpfel hatte er am Anfang?

Lösung: Es waren 382 Äpfel. Um auf die Lösung zu kommen, muss man mit der Formel (n+1)*2 von 1 sieben Mal rückwärts rechnen. Man erhält dann als Anzahl der Äpfel vor den jeweiligen Toren: 4 [=(1+1)*2], 10 [=(4+1)*2], 22, 46, 94, 190 und schließlich 382 [=(190+1)*2].

(b) für die Mittelstufe

Die Schildkröte hat 100m Vorsprung. Nach wie viel Metern überholt Achilles die Schildkröte, wenn Achilles 100mal schneller läuft als die Schildkröte?

Lösung: Wenn die Schildkröte $1\frac{1}{99}$ Meter gelaufen ist, wird sie von Achilles eingeholt.

Auf die Lösung kann man auf verschiedenen Wegen gelangen. Wenn man als Geschwindigkeit der Schildkröte 1m/sec wählt, ergibt sich für den Weg die Summe aus

$$1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\frac{1}{1000000}+\ldots=1{,}010101=1{,}\overline{01} \qquad \text{(in Meter)}$$

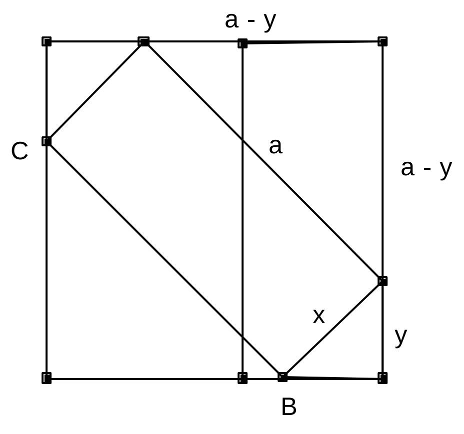
Oder man arbeitet mit der Formel Zeit gleich Weg durch Geschwindigkeit und setzt als Ansatz die Zeit der Schildkröte mit der von Achilles gleich. Bedeutet x der gesuchte Weg der Schildkröte (in m), so führt dies auf die Gleichung

$\frac{x}{v}=\frac{100+x}{100v}$; v kürzt sich heraus und für x erhält man $\frac{100}{99}=1\frac{1}{99}$.

(c) für die Oberstufe

Durch eine seitenparallele Gerade wird ein Quadrat **Q** in zwei ungleiche Rechtecke zerlegt; das größere sei G, das kleinere sei K.
Bei welcher Zerlegung kann man K auf **Q** derart legen, dass jeder Eckpunkt von K auf genau einer Seite von **Q** zu liegen kommt?

Lösung: Die Seitenlänge des kleineren Rechtecks K beträgt x = $a(\sqrt{2}-1)$ und die des größeren Rechtecks G $a(2-\sqrt{2})$, wobei a die Seitenlänge des Quadrates Q ist.
Für Interessierte seien hier einige Lösungshinweise gegeben.
Man kann zwei Mal den Satz des Pythagoras anwenden (siehe Skizze):



(1) $y^2+y^2 = x^2$
(2) $(a-y)^2 + (a-y)^2 = a^2$

oder ausnützen *(wie es z.B. Anna Roth in ihrer Lösung tat)* ,dass bei B und C ein 45°-Winkel ist und $\cos 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ist.